1. FUNCIONES DEFINIDAS MEDIANTE INTEGRALES

1.2. Funciones de Euler

Función Γ de Euler

Se define la función $\Gamma : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x}\, dx$$

que es una integral impropia convergente para cada $p > 0$.

Cálculo de Γ

1. Fórmula de reducción: Si $p > 1$ entonces $\Gamma(p) = (p-1) \cdot \Gamma(p-1)$.
2. Si $p = n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, entonces
$$\Gamma(p) = \Gamma(n) = (n-1)!$$
En particular $\Gamma(1) = 0! = 1$.
3. Si $p = n + r$ con $n \in \mathbb{N}^*$ y $0 < r < 1$, entonces
$$\gamma(p) = \Gamma(n+r) = (n-1+r)(n-2+r)\ldots(2+r)(1+r)r \cdot \Gamma(r)$$

Observaciones:

1. El cálculo de cualquier $\Gamma(p)$, $p > 1$ no entero, se hace aplicando la fórmula de recurrencia en función de un $\Gamma(r)$ con $0 < r < 1$.
2. La función $\Gamma(r)$, para $0 < r < 1$, está tabulada en tablas y disponible para su uso en cualquier software matemático.
3. Conviene saber, como se puede justificar más adelante, que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Ejemplo

Calcular el valor de: **(a)** $\Gamma(5)$; **(b)** $\Gamma(\frac{7}{3})$; **(a)** $\Gamma(\frac{9}{2})$.

Propiedades Γ

1. La función Γ es continua y derivable en $(0, +\infty)$, siendo:
$$\Gamma'(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} \ln x\, dx$$
2. Mediante el cambio de variable $x = -\ln y$, la expresión de la función Γ se transforma en:
$$\Gamma(p) = \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{p-1} dx$$
3. Si $0 < p < 1$ entonces: $\Gamma(p) \cdot \Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi}$.

Ejemplo

Usa la función Γ para calcular el valor de la integral: $I = \int_0^\infty \sqrt{x} e^{-x^3}\, dx$.

Fórmula de Gauss para la función Γ

La función Γ se puede expresar mediante un límite en la conocida **fórmula de Gauss**:

$$\Gamma(p) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^p}{p(p+1)\dots(p+n)}$$

cumpliéndose que:

- Coincide con la definición integral de Euler si $p > 0$.
- $\Gamma(p) < \infty$, si $p \notin \mathbb{Z}^- \cup \{0\} = \{\dots, -3, -2, -1, 0\}$.
- $\Gamma(p) = \infty$, si $p \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$.

Función β de Euler

Se define la función $\beta : (0,\infty) \times (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx$$

que es una integral impropia convergente para cada $p, q > 0$.

Propiedades de β

1. Simetría: $\beta(p,q) = \beta(q,p)$.

2. Si $p > 0$ y $q > 1$:

$$\beta(p,q) = \frac{q-1}{p}\,\beta(p+1, q-1) \qquad \textbf{(fórmula de recurrencia)}$$

En particular, si $q \in \mathbb{N}$, aplicando iterativamente la fórmula de recurrencia:

$$\beta(p,q) = \frac{(q-1)!}{p(p+1)\dots(p+q-1)} \quad \underset{q=1}{\Longrightarrow} \quad \beta(p,1) = \frac{1}{p}$$

3. Mediante el cambio de variable $x = \sin^2\theta$ en la integral, se obtiene:

$$\beta(p,q) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1}\theta \cos^{2q-1}\theta\, d\theta \qquad \textbf{(expresión trigonométrica de } \beta\textbf{)}$$

4. Cálculo de integrales trigonométricas:

$$I(n,m) = \int_0^{\pi/2} \sin^n\theta \cos^m\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\,\beta\left(\frac{n+1}{2}, \frac{m+1}{2}\right) \quad , \qquad n, m > -1$$

5. Relación entre β y Γ:

$$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Ejemplos

1. Calcula el valor de: **(a)** $\beta(5/2, 3)$; **(b)** $\beta(5/2, 3/2)$.

2. Calcula el valor de la integral: $I = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^3 x\, dx$.

Ejercicios

1. Calcula, usando integrales eulerianas, el valor de las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx$ **(c)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}$ **(e)** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^6\theta\cos^2\theta\,d\theta$

(b) $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-x^5}\,dx$ **(d)** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan x}\,dx$ **(f)** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3\theta\cos^2\theta\,d\theta$

2. Halla el área del recinto plano encerrado por la curva $x^{2/5}+y^{2/5}=a^{2/5}$, $a>0$.

Soluciones y/o sugerencias a los ejercicios:

1. **(a)** $\frac{\pi}{8}$; **(b)** $\frac{1}{5}\Gamma(\frac{2}{5})$; **(c)** $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$; **(d)** $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$; **(e)** $\frac{5\pi}{256}$; **(f)** $\frac{2}{15}$.
2. **(a)** $\frac{15\pi a^2}{128}$.